also

$$g_0 = A^4, \qquad \xi_0 = \frac{1}{A^2}, \qquad (A = 30{,}84)$$

und

$$M_0 = g_0\, \xi_0 = A^2 = 951\,.$$

Die Lösungen mit kleiner Zittergeschwindigkeit ergeben also schwerere Teilchen: Mesonen oder Protonen. Wir gewinnen mit dieser qualitativen Betrachtung den Anschluß an unsere frühere Diskussion[3,4,19] des Massenspektrums der Elementarteilchen. Die in der Dirac-Gleichung enthaltenen Strukturaussagen werden durch Gl. (41) vollständig erfaßt. Danach kann der Elektronenradius offenbar um Größenordnungen kleiner sein als der klassische Lorentzsche. Vielleicht kann M_0 sogar unendlich werden[25]. Wie es sich damit verhält, hängt von dem Verlauf von $F(Q)$ für kleine Q ab. Die Bestimmung dieser Funktion für mäßige Argumentwerte setzt Erfahrungen voraus, die über den Inhalt der Dirac-Gleichung hinausgehen und die an anderer Stelle behandelt werden sollen.

[25] Es verdient jedoch angemerkt zu werden, daß Diracs klassische Theorie des Elektrons gemäß dem Ansatz in Gl. (4) nicht mit der Diracschen Wellengleichung in Einklang ist, weil $\int g(\xi)\, \sqrt{\xi}\, d\xi$ divergiert.

Es ist mir eine ganz besondere Freude, diese Arbeit Hrn. Geheimrat A. Sommerfeld zu seinem 80. Geburtstag, am 5. Dezember 1948, zueignen zu können. Möge es uns vergönnt sein, uns seiner regen Anteilnahme am wissenschaftlichen Leben des Münchener Institutes noch lange zu erfreuen! Mögen dem Jubilar noch viele Jahre eines gesegneten Lebensabends beschieden sein!

Mechanik und Massenspektrum der Elementarteilchen

Von Helmut Hönl

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg i. Br.

(Z. Naturforschg. **3a**, 573—583 [1948]; eingegangen am 27. August 1948)

Herrn Geheimrat A. Sommerfeld in dankbarer Erinnerung an die Münchener Studienjahre zum 80. Geburtstag gewidmet.

1. Einführung und Zusammenfassung

H. A. Lorentz hat die These aufgestellt, daß es möglich sein müsse, die Mechanik des Elektrons — und damit im Prinzip *aller* Elementarteilchen — vollständig auf Elektrodynamik zurückzuführen. Der Durchführung des Lorentzschen Programms stellten sich aber eine Reihe von Schwierigkeiten entgegen, wie die unendliche Selbstenergie punktförmig angenommener Elementarteilchen, ferner der Elektronenspin und die von Dirac[1] und Wessel[2] hervorgehobene Selbstbeschleunigung des klassischen Punktelektrons. Während sich aber die unendliche Selbstenergie in der klassischen Theorie durch Erweiterung der Grundlagen der Maxwell-Lorentzschen Elektrodynamik nach den Arbeiten verschiedener Autoren[3] beseitigen läßt und die Selbstbeschleunigung als ein Hinweis auf die tatsächliche Instabilität von Elementarteilchen gedeutet werden kann (Mesonenzerfall)[4], hat sich der Elektronenspin lange Zeit als ein besonders hartnäckiges Hindernis für die konkrete Durchführung der Lorentzschen Theorie erwiesen. Erst neuerdings ist es Bopp[5] gelungen, den Elektronenspin in die Elektronentheorie konsequent einzubeziehen und als eine Art „Nebenbewegung" (oder „Zitterbewegung") des Elektronenortes zu verstehen.

Demgegenüber haben Papapetrou und der Verf.[6] schon vor längerer Zeit darauf hingewiesen, daß sich auch ganz unabhängig von der Elektrodynamik eine *Mechanik der Elementarteilchen*, speziell des Elektrons, begründen läßt. Es handelt sich dabei darum, die Mechanik des

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **167**, 148 [1938].

[2] W. Wessel, Ann. Physik (5) **43**, 565 [1943].

[3] M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **144**, 425 [1934]; **147**, 522 [1934]; **150**, 465 [1935]; P. A. M. Dirac[1]; H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 65 [1939].

[4] H. Hönl, Z. Naturforschg. **2a**, 537 [1947].

[5] F. Bopp, Ann. Physik (5) **42**, 572 [1943]; Z. Naturforschg. **1**, 53 [1946].

[6] H. Hönl u. A. Papapetrou, Z. Physik **112**, 512 [1939]; vgl. auch ebenda **114**, 478 [1939] u. **116**, 154 [1940].

gewöhnlichen relativistischen Massenpunktes derart zu erweitern, daß dabei der Spin ganz von selbst in Erscheinung tritt. Bemerkenswerterweise stimmen die dabei gewonnenen Bewegungsgleichungen im einfachsten Falle mit denjenigen, welche Bopp[7] auf elektronentheoretischem Wege gewonnen hat, genau überein. Die genannte Erweiterung besteht darin, daß man sich die das Teilchen aufbauende Massenverteilung nicht nach Art eines gewöhnlichen „Massenpunktes" vorstellt, sondern allgemeinere Multipole von Massenverteilungen überlagert; das einfachste derartige Teilchen entspricht also der Überlagerung eines Massenpoles und eines Massendipoles („Pol-Dipol-Teilchen"). Die Bewegungsgleichungen für Teilchen mit komplizierterer innerer Struktur lassen sich dabei nach einem rekurrenten Entwicklungsverfahren in relativistischer Strenge gewinnen[8]. Die prinzipielle Einführung negativer Massen durch die Massenmultipole wird dabei im Hinblick auf die negativen Energien beim Dirac-Elektron kaum befremdend sein.

Es zeigt sich nun, daß schon das einfachste, vom gewöhnlichen Massenpunkt verschiedene Teilchen, das Pol-Dipol-Teilchen, Eigenschaften besitzt, die denjenigen des Dirac-Elektrons weitgehend analog sind[9]. Das Pol-Dipol-Teilchen zeigt insbesondere eine innere Umlaufsbewegung, durch welche der Spin des Teilchens zustande kommt, und es ist ferner möglich, die (Mikro-)Geschwindigkeit der Umlaufsbewegung der Lichtgeschwindigkeit beliebig anzunähern, ohne daß dabei die Ruhenergie des Systems unendlich wird[8]. Bopp[7] hat ferner zeigen können, daß sich der kanonische Formalismus der Hamiltonschen Theorie sinngemäß auf Teilchen mit innerer Umlaufsbewegung (Nebenbewegung) übertragen läßt, und sich demgemäß Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion für solche Teilchen angeben lassen. Hierbei tritt nunmehr die Analogie mit der Diracschen Theorie des Elektrons auch in formaler Hinsicht vollkommen deutlich zutage. Es zeigt sich nämlich, daß der Bau der Hamilton-Funktion des klassischen Teilchens demjenigen des Dirac-Elektrons genau analog ist (nämlich bilinear in den Makroimpuls- und Mikrogeschwindigkeits-Komponenten), jedoch derart, daß das Massenglied jetzt eine *Funktion der Mikrovariabeln* des Systems wird. Dieser letztere Umstand scheint einen deutlichen Hinweis darauf zu enthalten, daß, wenn man das Pol-Dipol-Teilchen im Sinne des Korrespondenzprinzips als klassisches Modell für Elementarteilchen auffaßt und entsprechend die Makro- und Mikrovariabeln des Systems durch entsprechende Operatoren ersetzt, die zugehörige Wellengleichung auf ein *Massenspektrum* führt. Die physikalische Deutung dieses Sachverhaltes wird man darin zu erblicken haben, daß die möglichen Energiestufen, denen Elementarteilchen zuzuordnen sind, als Anregungsstufen desselben Systems oder weniger ausgezeichneter Grundtypen aufzufassen sein werden (vgl. hierzu Abschn. 5).

Bopp[10] hat diesen Gedanken in der oben genannten Arbeit auszubauen versucht und, indem er für die Paare kanonisch konjugierter Mikrovariabeln kanonische Vertauschungsrelationen forderte, eine Wellengleichung für den (6-dimensionalen) Koordinaten-Geschwindigkeitsraum aufgestellt, die ein Eigenwertproblem darstellt, dessen Energieeigenwerte einzelnen Elementarteilchen zugeordnet werden. Es will uns jedoch scheinen, daß noch ein anderer Weg offensteht, um zu Wellengleichungen für Elementarteilchen zu gelangen, der durch die Form der Dirac-Gleichung des Elektrons unmittelbar nahegelegt wird: er besteht darin, daß man, unter Beibehaltung der linearen Form der Wellengleichung, den Mikrovariabeln des klassisch korrespondierenden Teilchens allgemein Matrizensysteme zuordnet, zwischen denen algebraische Relationen (Vertauschungsrelationen *nicht* kanonischer Art) bestehen, wie sie durch die Eigenschaften des Spins (bzw. der Drehgruppe) korrespondenzmäßig gefordert werden. Unser Ansatz der Wellengleichung soll im übrigen mit demjenigen von L. de Broglie[11] für Teilchen mit beliebigem Spin übereinstimmen (méthode de fusion). Wir werden bei den folgenden Ausführungen vor allem den korrespondenzmäßigen Zusammenhang zwischen klassischem Teilchenmodell und quantenmechanischer Wellengleichung erörtern und speziell für die *Mesonen-Theorie* erläutern. Hinsichtlich der an die Wellengleichung zu stellenden Forderungen führt die hier dargestellte Theorie jedoch in zwei Punkten über de Broglie hinaus: erstens

[7] F. Bopp, Anm. 5,2.

[8] H. Hönl u. A. Papapetrou, Anm. 6,1.

[9] Vgl. hierzu E. Schrödinger, S.-B. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **1930**, 418.

[10] F. Bopp[7]; s. auch Z. Physik, im Erscheinen.

[11] L. de Broglie, C. R. hebd. Séances Acad. Sci. **209**, 265 [1939]; s. auch Théorie générale des particules à spin. Verlag Gauthier-Villard, Paris 1943.

darin, daß die Matrizensysteme *auszureduzieren* sind, wodurch sich erst eindeutige Aussagen über Elementarteilchen gewinnen lassen, und zweitens in der Forderung, daß das *Massenglied* der Wellengleichung als Funktion der die Mikrovariabeln repräsentierenden Matrizen darzustellen ist. Die erste Forderung ist schon von Kemmer[12] für Teilchen aufgestellt worden, welche nach de Broglie aus der „Verschmelzung" von *zwei* Dirac-Teilchen mit je dem Spin $1/2\,\hbar$ hervorgehen; sie bildet eine der Grundlagen für die Kemmersche Theorie der Mesonen. Die zweite Forderung führt unmittelbar auf die Existenz eines Massenspektrums. — In einer Fortsetzung dieser Arbeit (gemeinsam mit H. Boerner) soll ausführlich der Fall der Verschmelzungsstufe $n=3$ (Verschmelzung von *drei* Dirac-Teilchen) behandelt werden, welcher auf Wellengleichungen für Teilchen mit den Spinwerten $1/2\,\hbar$ und $3/2\,\hbar$ führt, von denen das erstere möglicherweise dem *Proton* entspricht. Da das Ausreduzieren der Matrixsysteme ein besonderes mathematisches Problem darstellt, kann diese Untersuchung unabhängig von der Theorie des Massenspektrums als ein Beitrag zur de Broglieschen Theorie aufgefaßt werden[13].

Gemäß den hier dargelegten Anschauungen lassen sich demnach die Elementarteilchen nach Gruppen ordnen, welche je einer gemeinsamen Verschmelzungsstufe angehören. Diese Auffassung entspricht jedoch kaum der Vorstellung, daß sich die sämtlichen Typen von Elementarteilchen als Anregungsstufen ein und desselben elementaren Gebildes ansehen lassen. Diese Annahme geht ja über unser tatsächliches (äußerst spärliches) Wissen von den Elementarteilchen weit hinaus, und es scheint uns daher das Gegebene zu sein, zunächst die formalen Möglichkeiten der Theorie zu untersuchen. Tatsächlich bleiben bei unserem Vorgehen die Massenwerte der Elementarteilchen weitgehend unbestimmt, so zwar, daß diese der Erfahrung anzupassen sind und nur die *Existenz* eines Massenspektrums in Evidenz gesetzt wird. Ein solches Vorgehen scheint uns die Einführung zweifelhafter Annahmen zu vermeiden, wie etwa die Hypothese, daß sich die Existenz *aller* Elementarteilchen auf der Grundlage einer erweiterten Elektrodynamik verständlich machen läßt (Bopp). Die mannigfaltigen Wechselbeziehungen und Umwandlungsverhältnisse der Elementarteilchen scheinen im Gegenteil auf einen komplizierteren hierarchischen Aufbau der Theorie hinzuweisen. Andererseits ist aber zu betonen, daß die „monadenhafte Abgeschlossenheit" der einzelnen Teilchengruppen, die unserer Darstellung anhaftet, nur eine Annäherung sein kann[14], und daß eine Ergänzung der Theorie im Sinne der von Bopp begonnenen Untersuchungen (eventuell unter erweiterten Voraussetzungen) daher besonders wünschenswert wäre.

Im Schlußabschnitt wird eine mit dem Massenspektrum in Zusammenhang stehende Vermutung über den *Ursprung der Höhenstrahlung* ausgesprochen und diskutiert.

2. Mechanik des Pol-Dipol-Teilchens (und verallgemeinerter Systeme)

Die relativistisch invarianten Bewegungsgleichungen des Pol-Dipol-Teilchens lassen sich aus einem Hamilton-Prinzip

$$\delta \int L(x_\alpha, u_\alpha, \dot{u}_\alpha)\, ds = 0 \qquad (2,1)$$

ableiten (x_α Raum-Zeit-Koordinaten, $u_\alpha = \dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}$, alle Ableitungen nach der Eigenzeit s), dessen Lagrange-Funktion L außer x_α und u_α noch die Ableitungen $\dot{u}_\alpha$ enthält:

$$L = -k_0\sqrt{-u_\alpha^2} - \frac{1}{2}\,k_1\frac{\dot{u}_\nu^2}{\sqrt{-u_\alpha^2}} - e\,\Phi_\alpha u_\alpha \qquad (2,2)$$

[12] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **173**, 91 [1940].

[13] Anm. b. d. Korrektur. Erst nach Abschluß dieser Arbeit sowie des Manuskriptes einer Arbeit von H. Boerner und dem Verf. wurden wir darauf hingewiesen, daß die Frage der Reduzibilität von Wellengleichungen für Teilchen mit beliebiger Spinquantenzahl und nicht verschwindender Masse in Arbeiten von H. A. Kramers, F. J. Belinfante u. J. K. Lubański, Physica **8**, 597 [1941], sowie von J. K. Lubański, ebenda **9**, 310 u. 325 [1942], weitgehend gefördert worden ist. Insbesondere ergibt sich auch nach diesen Untersuchungen ein Massenspektrum für Elementarteilchen. Es sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Theorie der Massenwerte nach Kramers, Belinfante und Lubański nicht mit der hier gegebenen Theorie identisch ist, da die genannten Autoren noch nicht die Möglichkeit ins Auge fassen, daß der Massenterm von den Mikrovariabeln des Systems abhängt. Daher sollte bei Teilchen der Verschmelzungsstufe $n=2$ (Mesonen) nach diesen Autoren, im Gegensatz zu uns, noch keine Aufspaltung der Massenwerte auftreten (allgemein erst für $n \geqq 3$).

[14] Vgl. hierzu die näheren Ausführungen am Schluß von Abschn. 4.

(k_0, k_1 Konstanten, Φ_α Viererpotential, e Teilchenladung); die Vorzeichengebung der Skalare[15] u_α^2 und $\dot{u}_\nu^2$ entspricht der Festsetzung

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = i\,c\,t$$

(also $u_\alpha^2 = -1$). Die zu u_α und $\dot{u}_\alpha$ kanonisch konjugierten Variabeln Makroimpuls Π_α und „innerer" Impuls ϱ_α folgen aus den Definitionen

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial u_\alpha} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\alpha}, \qquad \varrho_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_\alpha}. \tag{2, 3}$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\Pi_\alpha = \left(k_0 - \frac{3}{2} k_1 \dot{u}_\nu^2\right) u_\alpha + k_1 \ddot{u}_\alpha - e\,\Phi_\alpha, \tag{2, 4a}$$

$$\varrho_\alpha = -k_1 u_\alpha. \tag{2, 4b}$$

Die Bewegungsgleichungen nehmen jetzt die Gestalt an[16]

$$\frac{d\Pi'_\alpha}{ds} = f_{\alpha\beta}\, u_\beta \tag{2, 5}$$

mit

$$\Pi'_\alpha = \Pi_\alpha + e\,\Phi_\alpha, \qquad f_{\alpha\beta} = e\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha}\right); \tag{2, 5a}$$

die rechte Seite von (2,5) ist die Lorentz-Kraft. Der Grenzfall $k_1 = 0$ entspricht dem gewöhnlichen relativistischen Massenpunkt (mit Ladung).

Geht man von L durch eine Legendre-Transformation zu

$$F = u_\alpha \Pi_\alpha + \dot{u}_\alpha \varrho_\alpha - L \tag{2, 6}$$

über, welche nur noch von den kanonisch konjugierten Variabelnpaaren x_α, Π_α; u_α, ϱ_α (nicht mehr von $\dot{u}_\alpha$) abhängt, so ergibt sich aus (2,2) und (2,4b)

$$F = u_\alpha (\Pi_\alpha + e\,\Phi_\alpha) + k_0 - \frac{1}{2 k_1} \varrho_\alpha^2. \tag{2, 7}$$

Einsetzen von Π_α gemäß (2,4a) ergibt weiter das identische Verschwinden von F:

$$F = 0. \tag{2, 8}$$

Die Parallelität von (2,7), (2,8) mit der in den Raum-Zeit-Koordinaten symmetrisch geschriebenen Diracschen Wellengleichung (man hat Π_α durch $\frac{\hbar c}{i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ zu ersetzen) springt unmittelbar in die Augen. Zugleich zeigt es sich aber, daß das Massenglied

$$\mu\, c^2 = k_0 - \frac{1}{2 k_1} \varrho_\alpha^2 \tag{2, 9}$$

vom inneren Impuls ϱ_α (kinematisch von der inneren Umlaufsbewegung des Teilchens) abhängt. Dieser Umstand ist für die weiteren Überlegungen von besonderer Bedeutung.

Die Bewegungsgleichungen des Pol-Dipol-Teilchens lassen noch eine andere Fassung zu, welche der gewöhnlichen Hamiltonschen Theorie der Mechanik besonders nahekommt. Man wird zu diesem Zweck das Hamilton-Prinzip (2,1) unter Auszeichnung der Zeitkoordinate t mit Bopp so umschreiben:

$$\delta\int L\,\frac{ds}{dt}\,dt = \delta\int L'(\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{b})\,dt = 0, \tag{2, 1'}$$

wobei $\mathfrak{v} = \mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{v}'$ die ersten und zweiten Zeitableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{r}$ sind. Es gelten dann in den Variabeln

$$\mathfrak{P}_k = \frac{\partial L'}{\partial \mathfrak{v}_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathfrak{b}_k}, \qquad \mathfrak{s}_k = \frac{\partial L'}{\partial \mathfrak{b}_k} \tag{2, 10}$$

Bewegungsgleichungen in der kanonischen Form

$$\frac{d\mathfrak{r}_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{P}_k}, \qquad \frac{d\mathfrak{P}_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{r}_k}; \tag{2, 11a}$$

$$\frac{d\mathfrak{v}_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{s}_k}, \qquad \frac{d\mathfrak{s}_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{v}_k}. \tag{2, 11b}$$

Die Hamilton-Funktion

$$H = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{P}) + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{s}) - L'(\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{b}) \tag{2, 12}$$

des durch (2,2) beschriebenen Systems wird[17]

$$H = -e\,\varphi + \left(\mathfrak{v}, \mathfrak{P} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right) + \sqrt{1-\beta^2}\cdot \mu' c^2 \tag{2, 13}$$

[15] u_α^2 bzw. $\dot{u}_\alpha^2$ stehen statt der skalaren Produkte $u^\alpha u_\alpha$ bzw. $\dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha$ (Summation über gleiche Indizes).

[16] In den ursprünglich von Papapetrou und dem Verf.[6] angegebenen Bewegungsgleichungen steht $\dot{\varrho}^\nu u_\nu$ (bzw. $p^\nu u_\nu$) an Stelle von $k_1 \dot{u}_\nu^2$; der „innere" Impuls ϱ_α ist (bis auf das Vorzeichen) identisch mit dem „Dipolmoment" p_α.

[17] Wegen der Einzelheiten sei auf die Arbeit von F. Bopp verwiesen, Anm. 5,2.

mit

$$\mu' c^2 = k_0 - \frac{1}{2\,k_1}(1-\beta^2)\left(\mathfrak{s}^2 - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2\right) \qquad (2,14)$$

($\varphi, \mathfrak{A}$ skalares und Vektorpotential, $\beta^2 = \mathfrak{v}^2/c^2$). Ersichtlich hat die Hamilton-Funktion (2,13) wieder genau die von der Diracschen Theorie her geläufige Form, nur das Massenglied (2,14) hängt in komplizierterer Weise als nach (2,9) von den Mikrovariabeln des Systems ab.

Eine weitere Analogie zum Dirac-Elektron kommt darin zum Ausdruck, daß der *Drehimpulssatz* (gültig für ein freies oder ein im zentralsymmetrischen Potentialfeld befindliches Teilchen) ein von der inneren Umlaufsbewegung herrührendes Zusatzmoment fordert. Es gilt nämlich [18]

$$c\,\vec{M} = \left[\vec{x}, \vec{\Pi}\right] + \left[\vec{u}, \vec{\varrho}\right] = \text{const} \qquad (2,15)$$

bzw.

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}] + [\mathfrak{v}, \mathfrak{s}] = \text{const}. \qquad (2,15\,\text{a})$$

Man bestätigt (2,15) unmittelbar durch Differentiation nach der Eigenzeit s; man erhält dann nach (2,2), (2,3) und (2,4a):

$$c\,\dot{\vec{M}} = \left[\vec{u}, \vec{\Pi} + \dot{\vec{\varrho}}\right] = \left[\vec{u}, \frac{\partial \vec{L}}{\partial u}\right] = 0$$

(für $\mathfrak{A} = 0$ wird $\partial L/\partial u_k \sim u_k$). Die unter sich äquivalenten Formen (2,15) und (2,15a) zeigen, daß das Pol-Dipol-Teilchen eine Art Eigenimpulsmoment (Spin) besitzt, der in den Zusatzgliedern

$$\frac{1}{c}\left[\vec{u}, \vec{\varrho}\right] \quad \text{bzw.} \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{s}] \qquad (2,16)$$

zum Ausdruck kommt. Energie- und Impulssatz gelten in der üblichen Form.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen eine Verallgemeinerung zu, indem man (2,2) durch

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(\dot{u}_\nu^2)^n}{\left(\sqrt{-u_\alpha^2}\right)^{4n-1}} - e\,\Phi_\alpha u_\alpha \qquad (2,17)$$

ersetzt (c_n fester Konstantensatz). Der Ansatz (2,17) entspricht der Vorstellung, daß man dem Pol-Dipol-System höhere Massen-Multipole überlagert. Alle allgemeinen Überlegungen bleiben dabei dieselben, nur treten in den ausgeführten Ausdrücken (2,4a) und (2,4b) Glieder mit höheren Potenzen von $\dot{u}_\nu^2$ auf. Insbesondere bleiben die Formen (2,7) und (2,13) erhalten, und es ist $F \equiv 0$, nur daß die Massenglieder μc^2 und $\mu' c^2$ jetzt eine zusammengesetztere Gestalt annehmen. Ebenso bleibt die Form des Drehimpulssatzes (2,15), (2,15a) unberührt [19].

3. Forderungen an die Wellengleichung für Elementarteilchen

Faßt man das im Vorstehenden beschriebene Pol-Dipol-Teilchen und seine eventuellen Verallgemeinerungen im Sinne des Korrespondenzprinzips als klassisches Modell für Elementarteilchen auf, so werden nunmehr hinsichtlich der Wellengleichungen für Elementarteilchen die folgenden Forderungen nahegelegt:

I. *Die Wellengleichung soll vom Diracschen Typus sein.* Diese Forderung ergibt sich aus den in den Impulskomponenten Π_α bzw. $\mathfrak{P}_k$ linearen Formen (2,7) und (2,13) für das Pol-Dipol-Teilchen.

Wir machen daher den *Ansatz*:

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \partial_k + i\,\gamma_4 \varkappa\right)\psi = 0\,, \qquad (3,1)$$

mit den Abkürzungen

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}\,, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \varkappa = \frac{c}{\hbar}\mu\,. \qquad (3,1\,\text{a})$$

Die Größen $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ sind Matrizen, welche auf die Indizes der Wellenfunktion ψ einwirken; sie sind so zu bestimmen, daß den durch (3,1), (3,1a) dargestellten Teilchen ganzzahliger oder halbganzer Spin zukommt. Dies wird erreicht durch die Konstruktionsvorschrift:

II. *Die γ_μ sollen gemäß der de Broglieschen „Methode der Verschmelzung“ gebaut sein* (mé-

[18] Unter $\vec{x}, \vec{\Pi}, \ldots$ sollen die zu einem räumlichen Vektor zusammengefaßten ersten drei Komponenten der Vierervektoren $x_\alpha, \Pi_\alpha, \ldots$ verstanden werden; die eckigen Klammern bezeichnen Vektorprodukte. — Der Faktor c auf der linken Seite von (2,15) ist hinzuzufügen, da Π_α ebenso wie k_0 nach (2,1) und (2,3) die Dimension einer Energie besitzt (die Eigenzeit s hat die Dimension einer Länge).

[19] Wegen des Zusammenhangs der verallgemeinerten Form (2,17) der Lagrange-Funktion mit einer erweiterten linearen Elektrodynamik vgl. man F. Bopp, Z. Physik, im Erscheinen. — Verf. möchte Hrn. Bopp für freundliche Überlassung des Manuskripts sowie anregende Diskussionen auch an dieser Stelle herzlich danken.

thode de fusion). Genauer besagt dies: Sind $A = \{a_{hk}\}$, $B = \{b_{il}\}$, $C = \{c_{jm}\}$ irgendwelche Matrizen und bezeichne $A' B'' C'''$ ihr „Kronecker-Produkt", d. h. die Matrix $a_{hk}\, b_{il}\, c_{jm} \ldots$ deren Zeilenindex die Wertsysteme $(h\,i\,j\ldots)$, deren Spaltenindex $(k\,l\,m\ldots)$ durchläuft; sei α_μ ferner eine 4-reihige Darstellung der μ-ten Dirac-Matrix, deren Gesamtheit die Vertauschungsrelationen

$$\alpha_\mu\, \alpha_\nu + \alpha_\nu\, \alpha_\mu = 2\, \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \quad (3,2)$$

befriedigt, so sei γ_μ durch die 4^n-reihige Matrix:

$$\gamma_\mu = \frac{1}{n}\left(\alpha'_\mu\, 1'' \ldots 1^{(n)} + 1'\, \alpha''_\mu \ldots 1^{(n)} + \ldots + 1'\, 1'' \ldots \alpha_\mu^{(n)}\right) \quad (3,3)$$

dargestellt, wo 1 die 4-reihige Einheitsmatrix bedeutet.

Nach de Broglie gehören zu einem Matrixsystem $\gamma_\mu = \gamma_\mu^{(n)}$ der *Stufe n* je Teilchen mit dem maximalen Spin $n/2$ (in Einheiten $\hbar$), und zwar bei ganzzahligen n mit den Spinwerten $0, 1, \ldots, n/2$, bei ungeradzahligen n mit den Werten $1/2, 3/2, \ldots, n/2$. — Im besonderen ist $\gamma_\mu^{(1)} = \alpha_\mu$ (Diracsches Elektron).

Um zu eindeutigen Aussagen über die Eigenschaften von Elementarteilchen mit vorgegebenem Spin zu gelangen, ist die weitere Forderung nötig:

III. *Das Matrixsystem der γ_μ ist auszureduzieren; jeder irreduzibeln Darstellung entspricht ein Elementarteilchen.*

Unter Berücksichtigung der Forderung III ist Kemmer für den Fall $n = 2$ zu einer Theorie der *Mesonen* gelangt. Für die möglichen Spinwerte 1 und 0 ergeben sich eine 10-reihige und eine 5-reihige Darstellung, von denen die erste auf die von Proca aufgestellten Wellengleichungen für Teilchen von Spin 1 führen (vektorielle Mesonentheorie).

Endlich fügen wir hinzu:

IV. *Das Massenglied $\varkappa$ in (3,1) ist als Funktion der γ_μ anzusetzen; und zwar derart, daß $\varkappa$ mit allen γ-Produkten vertauschbar ist.*

Die letztgenannte Forderung wird korrespondenzmäßig durch die Ausdrücke (2,9) und (2,14) unmittelbar nahegelegt, wonach klassisch der Massenwert von den Mikrovariabeln des Systems abhängt. Die Bedingung, daß $\varkappa$ mit allen Produkten $\gamma_\mu\, \gamma_\nu \ldots \gamma_\tau$ vertauschbar sein soll, bewirkt, daß $\varkappa$ in (3,1) einer Konstanten so ähnlich wie nur möglich wird. Dies ist insbesondere die (notwendige) Bedingung dafür, daß aus (3,1) eine skalare de Brogliesche Wellengleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{1}{c^2}\, \partial_t^2 - \Delta + \varkappa^2\right) \psi = 0 \quad (3,4)$$

hervorgeht[20].

Die Forderung IV hat im Verein mit den übrigen Postulaten unmittelbar ein *Massenspektrum* zur Folge; sie stellt sich als eine sehr weitgehende Einschränkung hinsichtlich der Festlegung des Massengliedes $\varkappa$ heraus. Wir werden im folgenden zu untersuchen haben, wie weit die Einschränkung reicht, und welche korrespondenzmäßigen Parallelen sich dabei feststellen lassen.

Forderung IV läßt sich auch so ausdrücken, daß $\varkappa$ dem „*Zentrum*" der Algebra der γ_μ angehören soll[21].

4. Korrespondenzmäßige Entsprechungen zwischen Mesonentheorie und Pol-Dipol-Teilchen. Massenverhältnis der Mesonenarten

Wir untersuchen nunmehr die Folgen unserer Forderungen, insbesondere von IV, hinsichtlich des Massenspektrums der *Mesonen*.

a) Die Theorie der Wellengleichung für Mesonen ist von Kemmer[12], ausgehend von den für die Matrixsysteme für $n = 2$ gültigen Vertauschungsrelationen, in einer grundlegenden Arbeit entwickelt worden. Schreibt man die Wellengleichung (für den Fall der Abwesenheit äußerer Felder) zunächst in der „symmetrischen Form"

$$(\tilde{\beta}_\mu\, \partial_\mu + \varkappa)\, \psi = 0, \qquad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right), \quad (4,1)$$

so genügen die Matrizen $\tilde{\beta}_\mu$ den Vertauschungs-

[20] Um (3,4) sicherzustellen sind (3,1), (3,3) und die Forderung IV für $n \geqq 3$ noch durch eine Nebenbedingung zu ergänzen; vgl. L. de Broglie[11]. Auf die Formulierung dieser Nebenbedingung für $n = 3$ kommen wir bei anderer Gelegenheit zurück (vgl. Anm. 13).

[21] Unter dem *Zentrum* einer Algebra versteht man die Gesamtheit der Größen, welche mit *allen* Produkten der die Algebra aufbauenden (hyperkomplexen) Zahlsysteme vertauschbar sind. Die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren, welche den betreffenden „Unterraum" aufspannen, wird als „Dimension" des Zentrums bezeichnet; vgl. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, J. Springer, Berlin 1931, Bd. II.

relationen:

$$\widetilde{\beta}_\mu \widetilde{\beta}_\nu \widetilde{\beta}_\varrho + \widetilde{\beta}_\varrho \widetilde{\beta}_\nu \widetilde{\beta}_\mu = \widetilde{\beta}_\mu \delta_{\nu\varrho} + \widetilde{\beta}_\varrho \delta_{\nu\mu}\,. \tag{4,2}$$

(4,1) läßt sich aber auch in die gewöhnliche „Hamiltonsche Form"

$$\left(\frac{1}{c}\partial_t + \sum_{k=1}^{3} \beta_k \partial_k + i\,\beta_4 \varkappa\right)\psi = 0 \tag{4,3}$$

mit

$$\beta_k = \frac{1}{i}\left(\widetilde{\beta}_k \widetilde{\beta}_4 - \widetilde{\beta}_4 \widetilde{\beta}_k\right), \quad \beta_4 = \widetilde{\beta}_4 \tag{4,4}$$

umschreiben, wobei die β_μ unter sich dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die $\widetilde{\beta}_\mu$ unter sich[22]:

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\varrho + \beta_\varrho \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\nu\varrho} + \beta_\varrho \delta_{\nu\mu}\,. \tag{4,5}$$

Es läßt sich leicht zeigen[23], daß die Vertauschungsrelationen (4,2) bzw. (4,5) gerade durch die de Brogliesche Darstellung (3,3) für $n = 2$ erfüllt werden; wir können also z. B. setzen

$$\beta_\mu = \gamma_\mu^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\alpha'_\mu 1'' + 1' \alpha''_\mu\right), \tag{4,6}$$

im Einklang mit (3,3). Nach Kemmer[24] werden ferner die Komponenten des Spins durch

$$S_{kl} = \frac{\hbar}{i}\left(\widetilde{\beta}_k \widetilde{\beta}_l - \widetilde{\beta}_l \widetilde{\beta}_k\right) = \frac{\hbar}{i}\left(\beta_k \beta_l - \beta_l \beta_k\right) \tag{4,7}$$

dargestellt, in genauer Analogie zu den Spinkomponenten des Dirac-Elektrons

$$\sigma_{kl} = \frac{\hbar}{4\,i}\left(\alpha_k \alpha_l - \alpha_l \alpha_k\right). \tag{4,7a}$$

Aus $S_{kl}^3 = S_{kl}$ folgen die Eigenwerte der Spinkomponenten der Mesonen ± 1 und 0.

Wie Kemmer gezeigt hat, lassen sich die 16-reihigen Matrizen $\widetilde{\beta}_\mu$ bzw. β_μ nach einer 10-, einer 5- und einer 1-reihigen Darstellung ausreduzieren. Die 10-reihige Darstellung entspricht Teilchen mit dem Spin 1, die 5-reihige Teilchen mit dem Spin 0, die 1-reihige dagegen keiner weiteren Teilchenart (alle $\beta_\mu^{(1)} = 0$).

[22] (4,5) folgt unmittelbar aus (4,2) und (4,4).

[23] Vgl. G. Petiau, Thèse de doctorat, Paris 1936, Mém. (Cl. d. Sc.) Acad. roy. Belgique **16**, fasc. 2 [1936]; R. J. Duffin, Physic. Rev. **54**, 1114 [1939].

[24] Kemmer[12], Gl. (26); die Identität der Ausdrücke (4,7) wieder nach (4,2) und (4,4).

b) Um die möglichen Massenwerte für die beiden Mesonenarten zu ermitteln, haben wir zunächst das Zentrum der Algebra der β_μ aufzusuchen. Sei

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{4} \beta_\mu^2\,, \tag{4,8}$$

so folgt aus (4,5) zunächst die Vertauschungsrelation[25]

$$\beta_\mu\,\omega = (5 - \omega)\,\beta_\mu\,, \tag{4,9}$$

und hieraus weiter die Vertauschbarkeit der Matrix

$$P = \omega\,(5 - \omega) \tag{4,10}$$

mit allen β_μ- und allen β-Produkten. P gehört also jedenfalls dem Zentrum an. Ebenso ergibt sich unmittelbar, daß jede (ganzzahlige) Potenz von P dem Zentrum angehört. Da es aber nach Kemmer nur 3 irreduzible (inäquivalente) Darstellungen der β_μ gibt[26], so muß das Zentrum die Dimension 3 haben. Die einfachsten, voneinander linear unabhängigen Basiselemente, welche das Zentrum aufspannen, sind daher: das Einheitselement E, P und P^2. Hieraus ergibt sich für $\varkappa$ als einfachste lineare Zusammensetzung

$$\varkappa = a\,E + b\,P + c\,P^2 \tag{4,11}$$

mit a, b und c als willkürlichen Zahlenfaktoren[27]. *Das Massenglied $\varkappa$ ist also nur Funktion des Einheitselementes E und der Quadratsumme ω.* Da die $\widetilde{\beta}_\mu$ aus den β_μ im übrigen durch eine unitäre Transformation hervorgehen [vgl. die definieren-

[25] Zum Beweise der Vertauschungsrelation (4,9) beachte man, daß aus (4,5) zunächst

$$\beta_\mu \beta_\nu^2 = \beta_\mu - \beta_\nu^2 \beta_\mu \qquad (\mu \neq \nu), \qquad \beta_\mu^3 = \beta_\mu$$

hervorgeht. Daraufhin läßt sich umformen:

$$\begin{aligned}\beta_1\,\omega &= \beta_1\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2\right)\\ &= \beta_1^3 + 3\,\beta_1 - \left(\beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2\right)\beta_1 - \beta_1^3 + \beta_1^3\\ &= 5\,\beta_1 - \omega\,\beta_1\,, \qquad \text{w. z. b. w.}\end{aligned}$$

[26] Vgl. Anm. 12, S. 102 ff.

[27] Höhere Potenzen von P als P^2 treten in (4,11) nicht auf, da sich diese in ein Linearaggregat in E, P und P^2 spalten ließen; es gilt nämlich die Matrixgleichung

$$P\,(P-4)\,(P-6) = 0\,,$$

wie sich auch aus der (aus den Eigenwerten von ω gemäß den Kemmerschen Darstellungen der β_μ folgenden) algebraischen Gleichung

$$\omega\,(\omega-1)\,(\omega-2)\,(\omega-3)\,(\omega-4) = 0$$

entnehmen läßt.

den Relationen (4,2) und (4,5)] und jede Darstellung des Zentrums notwendig diagonal ist, so kann $\varkappa$ ebensogut durch

$$\varkappa = a E + b \widetilde{P} + c \widetilde{P^2} \qquad (4, 11\,\mathrm{a})$$

mit

$$\widetilde{P} = \widetilde{\omega}(5 - \widetilde{\omega}), \qquad \widetilde{\omega} = \sum_{\varrho=1}^{4} \widetilde{\beta}_\varrho^2 \qquad (4, 11\,\mathrm{b})$$

dargestellt werden.

c) Mit dieser allgemeinen Form für den Massenterm $\varkappa$ der Wellengleichung scheint noch wenig gewonnen, solange wir über die Werte der unbestimmten Faktoren a, b, c keine näheren Aussagen machen können. Jedoch fällt eine korrespondenzmäßige Analogie mit der Mechanik des Pol-Dipol-Teilchens in die Augen, deren Verfolgung eine bestimmtere Festlegung der Konstanten ermöglicht.

Zunächst besteht *genaue* Korrespondenz zwischen (2,7), (2,8) und der Wellengleichung (4,1) in der symmetrischen Form sowie mit Rücksicht auf die allgemeine Form der Wellengleichung in der Hamiltonschen Form

$$\left(\frac{\hbar}{i}\,\partial_t + H\right)\psi = 0\,,$$

ebenso zwischen (2,13) und (4,3), falls einander zugeordnet werden:

$$u_\mu \to i\,\widetilde{\beta}_\mu, \qquad \mathfrak{v}_k \to c\,\beta_k. \qquad (4, 12)$$

Andererseits läßt der Vergleich von (2,16) mit (4,7) unmittelbar die korrespondenzmäßigen Entsprechungen erkennen:

$$u_k \varrho_l - u_l \varrho_k \to \frac{\hbar c}{i}\left(\widetilde{\beta}_k \widetilde{\beta}_l - \widetilde{\beta}_l \widetilde{\beta}_k\right), \quad (4, 13\,\mathrm{a})$$

$$\mathfrak{v}_k \mathfrak{s}_l - \mathfrak{v}_l \mathfrak{s}_k \to \frac{\hbar}{i}\left(\beta_k \beta_l - \beta_l \beta_k\right). \quad (4, 13\,\mathrm{b})$$

Somit also auch:

$$\varrho_\mu \to -\hbar c\,\widetilde{\beta}_\mu, \qquad \mathfrak{s}_k \to \frac{\hbar}{i c}\,\beta_k. \qquad (4, 14\,\mathrm{a, b})$$

Es handelt sich weiterhin darum, den Zusammenhang zwischen der klassischen Form des Massengliedes, (2,9) und (2,14), und den entsprechenden, durch unsere Forderung IV festgelegten Ausdrücken (4,11) bzw. (4,11a) zu finden. Offensichtlich tritt die Korrespondenz hierbei unverhüllter bei den symmetrischen Ausdrücken (2,9) und (4,11a) zutage. Der Tatsache, daß klassisch das Massenglied μ nur Funktion der Quadratsumme ϱ_α^2 ist, entspricht nach (4,11a) und (4,14a) aufs genaueste, daß $\varkappa$ nur Funktion der Quadratsumme $\widetilde{\omega}$ ist:

$$\mu\,(\varrho_\alpha^2) \to \varkappa\,(\widetilde{\omega}). \qquad (4, 15)$$

Man wird daher versuchen, die noch unbestimmten Konstanten in $\varkappa$ derart festzulegen, daß die Korrespondenz zwischen μ und $\varkappa$ so eng wie möglich wird. Nun korrespondiert nach (4,14a) $\varrho_\alpha^2 \to (\hbar c)^2\,\widetilde{\omega}$; eine bis zum *linearen* Gliede in $\widetilde{\omega}$ korrespondierende Übereinstimmung von (2,9) und (4,11a) erhält man daher, wenn man setzt:

$$a = \frac{\hbar}{c}\,k_0, \quad b = -\frac{1}{10\,k_1}\,\frac{\hbar^3}{c}, \quad c = 0. \quad (4, 16)$$

Damit wird für Mesonen nach (4,11a) und (4,11b):

$$\varkappa_M = \frac{\hbar}{c}\,\mu_M = \frac{\hbar}{c}\left\{k_0 E - \frac{1}{2\,k_1}\,\hbar^2 c^2 \left(\widetilde{\omega} - \frac{\widetilde{\omega}^2}{5}\right)\right\}. \qquad (4, 17)$$

Unsere Festlegung der Konstanten entspricht der Vorstellung, daß das klassische Mesonenmodell dem Pol-Dipol-Teilchen so nahe wie möglich kommen soll. Das Auftreten des in $\widetilde{\omega}$ quadratischen Gliedes ist mit Rücksicht auf unsere Forderung IV aber dann unvermeidlich. Man wird das Auftreten dieses Gliedes mit Rücksicht auf die Verallgemeinerung der Lagrange-Funktion am Ende von Abschn. 2 wohl so zu deuten haben, daß das klassische Mesonenmodell kein reines Pol-Dipol-Teilchen ist, sondern daß diesem ein Quadrupol überlagert ist.

d) Eine nähere Bestimmung der den beiden Mesonenarten zukommenden Eigenmassen ist nur möglich, soweit man über die Konstanten k_0 und k_1 der Lagrange-Funktion weitere Aussagen machen kann. Entschließt man sich zu der Annahme, daß Mesonen gleichsam nur höhere Anregungszustände von Elektronen sind, und setzt man demgemäß die Werte der Konstanten k_0 und k_1 für Elektronen und Mesonen als *gleich* voraus, so läßt sich das theoretisch zu erwartende Massenverhältnis der beiden Mesonenarten mit Rücksicht auf die *empirische Kleinheit der Elektronenmasse* angeben. Führt man die genau analoge Überlegung (wie soeben) nunmehr für Elektronen durch (wobei das klassische Elektronenmodell wieder als Pol-Dipol-Teilchen vorausgesetzt wird[28]), so erhält man für die Elektronenmasse mit Rücksicht auf den Faktor 1/4 in (4, 7a) gegenüber (4, 7) (der weiterhin im Quadrat vorkommt) und der daher geltenden Korrespondenz[29]

$$\varrho_a^2 \to \frac{(\hbar\, c)^2}{16}\,\tilde{\omega}_e = \frac{(\hbar\, c)^2}{4}\,E$$

in Analogie zu (4, 17):

$$\varkappa_e = \frac{\hbar}{c}\,\mathrm{m_e} = \frac{\hbar}{c}\left(k_0 - \frac{(\hbar\, c)^2}{8\, k_1}\right)E. \qquad (4,18)$$

Die empirische Kleinheit der Elektronenmasse (verglichen mit den Mesonenmassen) fordert jetzt

$$k_0\, k_1 \approx (\hbar c)^2/8\,. \qquad (4,19)$$

Wir haben in (4, 17) jetzt die Eigenwerte 3 und 2 bzw. 4 und 1 von $\tilde{\omega}$ für die 10- bzw. 5-reihige Darstellung (Mesonen mit dem Spin 1 bzw. 0) einzusetzen. Dies ergibt das *Massenverhältnis* für die beiden Mesonenarten[30]:

$$\mu_1 : \mu_0 \approx 19:11\,. \qquad (4,20)$$

Obwohl dieses Verhältnis mit den von Lattes, Ochialini und Powell[31] neuerdings aus den Mesonenumwandlungen in photographischen Schichten abgeleiteten Massenwerten der Mesonen (etwa 340 $\mathrm{m_e}$ und 200 $\mathrm{m_e}$) sicherlich innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt[32], so möchten wir auf diese Übereinstimmung doch keinen besonderen Wert legen, da einerseits die experimentellen Ergebnisse noch recht unsicher sind, andererseits aber theoretisch doch auch noch andere Möglichkeiten der Festlegung der Konstanten bestehen. Es sollte hier nur gezeigt werden, daß die korrespondenzmäßigen Beziehungen immerhin so eng sind, daß eine bestimmte Festlegung der Konstanten und damit des theoretischen Massenverhältnisses jedenfalls recht naheliegend erscheint.

e) Sollte die hier gemachte Annahme, daß sich die Massenwerte des Elektrons und der beiden Mesonenarten aus *derselben* klassischen Lagrange-Funktion[33] und deren Übersetzung in quantentheoretische Wellengleichungen verständlich machen lassen, zutreffend sein, so würde sich demnach die *Elektronenmasse* [nach (4, 18) und 4, 19)] als *Differenz* von zwei im Vergleich zu ihr sehr großen Massentermen ergeben, die ihrerseits von der Größenordnung der Mesonenmassen sind. Aus dem Vorstehenden entnehmen wir genauer

$$k_0 \approx \frac{(\hbar\, c)^2}{8\, k_1} \approx \frac{5}{19}\,\mu_1 \approx \frac{5}{11}\,\mu_0 \approx 90\,\mathrm{m_e}\,, \qquad (4,21)$$

wenn wir $\mu_0 \approx 200\,\mathrm{m_e}$ annehmen. Nun haben wir schon früher darauf hingewiesen, daß sich die Auffassung, daß die Elektronenmasse als Differenz von zwei sehr großen Energietermen zustande kommt, aus dem Pol-Dipol-Modell des Elektrons und der Tatsache, daß nach der Diracschen Wellengleichung die Mikrogeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit jedenfalls sehr nahe kommt, korrespondenzmäßig erschließen läßt[34]. Theoretisch würde die Mikrogeschwindigkeit erst dann mit der Lichtgeschwindigkeit übereinstimmen, wenn die die Elektronenmasse konstituierenden Terme unendlich groß werden. Nach (4, 21) läßt sich nun umgekehrt die Abweichung der Mikrogeschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit angeben[34]:

$$\beta = \frac{v}{c} = 1 - \frac{2\,\mathrm{m_e^2}}{k_0^2} = 1 - \frac{1}{5000}\,.$$

Diese Abweichung im Vergleich damit, daß nach der Diracschen Wellengleichung die Mikrogeschwindigkeit exakt gleich der Lichtgeschwindigkeit sein sollte, dürfte vielleicht einen Hinweis

[28] Diese Annahme ist wegen der früher ausführlich diskutierten Analogie zwischen Dirac-Elektron und Pol-Dipol-Teilchen besonders naheliegend; vgl. H. Hönl u. A. Papapetrou[6].

[29] Schreibt man die Dirac-Gleichung für das Elektron in die Form $(\tilde{\alpha}_\mu \partial_\mu + \varkappa_e)\,\psi = 0$ um, so wird $\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_4\,\alpha_i}{i}\,, \ldots, \tilde{\alpha}_4 = \alpha_4$ und daher $\tilde{\omega}_e = \Sigma\,\tilde{\alpha}_\mu^2 = 4\,E$.

[30] Daß die Massenwerte μ_M nach (4, 17) und (4, 19) negativ herauskommen, ist wegen der Symmetrie der Wellengleichung in bezug auf positive und negative Werte von $\varkappa$ bedeutungslos.

[31] Lattes, Ochialini u. Powell, Nature [London] **160**, 453, 486 [1947].

[32] Nach den auf der Züricher Tagung (Juli 1948) mitgeteilten Ergebnissen liegen die wahrscheinlichen Massenwerte etwa bei 300 $\mathrm{m_e}$ und 200 $\mathrm{m_e}$.

[33] Dies würde bedeuten, daß Elektron und Mesonen als Mitglieder derselben „Familie" von Elementarteilchen anzusehen sind. Ob noch andere Repräsentanten derselben Familie (mit anderen Spinwerten) existieren, kann nur die Erfahrung zeigen.

[34] H. Hönl u. A. Papapetrou[6], insbes. Gl. (53) sowie Abschn. 2, 2 (S. 528); eine ähnliche Auffassung über das Zustandekommen der Elektronenmasse, jedoch ohne Bezugnahme auf den Elektronenspin, vertritt P. A. M. Dirac[1].

enthalten. daß die Diracsche Wellengleichung nicht exakt richtig sein kann und durch Zusatzglieder zu ergänzen ist. In der gleichen Richtung weisen die nach der Methode der Radiospektroskopie neuerdings sichergestellten Abweichungen der Wasserstoff-Feinstruktur von der Sommerfeldschen Feinstrukturformel[35]. Es darf daher ein innerer Zusammenhang dieser beiden Tatsachen erwartet werden. doch soll auf eine korrespondenzmäßige Abschätzung der hiernach zu erwartenden Abweichungen von der Feinstrukturformel nicht näher eingegangen werden.

5. Abschließende Bemerkungen. Eine Vermutung über den Ursprung der Höhenstrahlung

a) Unsere Überlegungen scheinen auf einen engen Zusammenhang zwischen klassischem Teilchenbild und dem wirklichen Verhalten der Elementarteilchen im Sinne des Korrespondenzprinzips hinzuweisen. Man wird daher die möglichen Typen von Elementarteilchen teils nach gemeinsamen klassisch korrespondierenden Lagrange-Funktionen und teils nach ihren Spinwerten zu klassifizieren haben. Als Beispiel hierfür haben wir im Vorangehenden den Zusammenhang von Elektron und Mesonen näher betrachtet, wobei die nahe Verwandtschaft dieser Teilchenarten durch die empirisch bekannte Umwandlung von Mesonen in Elektronen (und Neutrinos) nahegelegt wird.

Über den inneren Zusammenhang von Teilchenarten mit verschiedener Lagrange-Funktion wird man dagegen gegenwärtig kaum etwas Sicheres aussagen können; vielmehr erscheinen die Verhältnisse hier äußerst verwickelt. Die Tatsache, daß die Kräfte zwischen „schweren" Teilchen. Protonen und Neutronen, wesentlich durch Mesonen vermittelt werden, daß also an die schweren Teilchen ebenso ein Mesonenfeld angeheftet ist, wie an die Elektronen ein elektromagnetisches Feld, läßt allgemein einen hierarchischen Aufbau der Elementarteilchen vermuten, derart, daß die den einfacheren Teilchen zugeordneten Wellenfelder jeweils die Grundlage für den Aufbau der höheren Elementarteilchen abgeben. Daher erscheint es auch nicht gerechtfertigt, für Teilchen verschiedener Stufe eine gemeinsame Lagrange-Funktion vorauszusetzen bzw. über die in den Lagrange-Funktionen auftretenden Konstanten im voraus bestimmte Annahmen zu machen. Vielmehr wird man umgekehrt versuchen, die Theorie von Teilchen verschiedener Stufe (etwa in Anlehnung an die in Abschn. 3 formulierten allgemeinen Forderungen) in möglichst allgemeiner Weise zu entwickeln, um erst nachträglich die unbekannten Konstanten des Massenspektrums den bekannten empirischen Massenwerten soweit als möglich anzupassen.

Im ganzen wird man erwarten dürfen, daß die bei uns einseitig an das Teilchenbild anknüpfenden Betrachtungen durch eine umfassendere „Feldmechanik" auf der Grundlage einer allgemeinen (nicht *nur* elektromagnetischen) Feldtheorie weiter zu unterbauen sein werden. In diesem Sinne setzen unsere Überlegungen über den Zusammenhang von Mesonen und Elektronen in Abschn. 4 beispielsweise voraus, daß diesen Teilchen (und möglicherweise noch anderen unbekannten Teilchen mit höheren Spinwerten) ein gemeinsames feldmechanisches Modell im Sinne einer verallgemeinerten Elektrodynamik zugrunde liegt (Bopp). Da sich von hier aus wahrscheinlich auch Abweichungen der Wellengleichung vom Diracschen Typus ergeben, so sind die Forderungen in Abschn. 3 vermutlich auch nur als eine Näherung anzusehen (gewissermaßen als eine „nullte" Näherung). Darüber hinaus scheint es, daß ein hierarchischer Aufbau der Theorie der Elementarteilchen auch nur auf der Grundlage einer allgemeinen Theorie der Wellenfelder[36] einen adäquaten Ausdruck finden kann.

b) Unabhängig von diesen Einzelfragen können wir als allgemeines Ergebnis hervorheben, daß es offenbar *unendlich viele Typen von Elementarteilchen* geben muß. Unser Verfahren, Elementarteilchen verschiedener Stufe (im Sinne von de Broglie) zu unterscheiden und von Stufe zu Stufe fortzuschreiten, findet offenbar prinzipiell keine Grenze. Andererseits läßt das Massenspektrum nirgends eine Häufung nach hohen Massenwerten hin erwarten. Der vermutete hierarchische Aufbau der endgültigen Theorie der Elementarteilchen macht vielmehr ein sehr rasches Anwachsen der Massenwerte mit der Stufe der Elementarteilchen wahrscheinlich.

Von hier aus erscheint aber eine Vermutung über den *Ursprung der Höhenstrahlung* sehr naheliegend. Man braucht nur anzunehmen, daß die verschiedenen möglichen Typen mit sehr

[35] Lamb u. Retherford, Physic. Rev. **72**, 421 [1947].

[36] W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **1**, 608 [1946].

hohen Massenwerten einmal realisiert gewesen sind, dann aber in die uns bekannten stabilen Formen von Elementarteilchen, *Protonen* (bzw. Neutronen) und *Elektronen*, zerfallen sind. Hierbei muß der Massenunterschied als kinetische Energie der Zerfallsteilchen in Erscheinung treten und somit eine *durchdringende Strahlung* darstellen. In der Tat muß Instabilität als eine allgemeine Eigenschaft aller höheren Zustände wegen der in jeder Feldmechanik auftretenden dissipativen Kräfte angesehen werden; Stabilität, welche den Protonen und Elektronen zukommt, ist als „Ausnahme" anzusehen, wie beim Grundzustand der Atome und Moleküle in der Atomphysik. Im einzelnen kann man sich vorstellen, daß die instabilen Teilchen großer Masse entweder direkt oder indirekt, d. h. unter Durchlaufen von Zwischenstufen, in die stabilen Teilchen übergehen.

Die Entstehung der instabilen Formen von Elementarteilchen kann natürlich nur unter außergewöhnlichen Bedingungen vor sich gegangen sein. Man mag sich vorstellen, daß diese Teilchen ihre Entstehung den kosmischen Katastrophen verdanken, welche die neuere Kosmologie annimmt, also entweder bei der durch die Flucht der Spiralnebel und die Verteilung der Elemente nahegelegten „Urexplosion" (v. Weizsäcker) einmal entstanden sind, oder bei jedem Supernova-Ausbruch (im Sinne der Baade-Zwickyschen Hypothese) neu entstehen. Da wir die Bedingungen dieser katastrophenartigen Vorgänge nicht übersehen, läßt sich natürlich auch nicht voraussagen, ob diese ausreichen, Energien von der erforderlichen Größe (bis zu 10^{16} eV) zu liefern; umgekehrt wird sich aber auch das Gegenteil schwerlich beweisen lassen.

c) Es scheint uns jedenfalls lohnend, die hier ausgesprochene Vermutung über den Ursprung der Höhenstrahlung näher zu prüfen und mit den Erfahrungen über die Höhenstrahlung zu vergleichen. Aus diesem Grund sollen hier noch zwei naheliegende Einwände kurze Erwähnung finden.

Erstens gehen die Erfahrungen über die Höhenstrahlung mehr und mehr dahin, daß die primär auffallende Strahlung vorwiegend Protonenstrahlung ist und daß Elektronen dabei jedenfalls eine nur geringfügige Rolle spielen[37]. Es bleibt somit zunächst unverständlich, warum die eine Sorte stabiler elementarer Teilchen in der primären Höhenstrahlung nicht merklich vorkommt. Es wird jedoch in einer vor kurzem erschienenen Arbeit von Feenberg und Primakoff[38] wahrscheinlich gemacht, daß energiereiche Elektronen in einem Zeitraum von etwa $2 \cdot 10^9$ Jahren (dem kosmologischen Alter der Welt) durch Compton-Zusammenstöße mit Lichtquanten von Sternenlicht im intergalaktischen Raume und Paarbildungsprozesse soviel Energie verlieren, daß sie durch das Magnetfeld der Erde abgeschirmt werden und nicht mehr in die tieferen Schichten der Erdatmosphäre eintreten können.

Zweitens scheint eine Schwierigkeit für unsere Auffassung darin zu liegen, daß die Verteilung der Höhenstrahlteilchen über das Energiespektrum erfahrungsgemäß (wenigstens für nicht zu hohe Energien) kontinuierlich ist und etwa nach einem $E^{-1,8}$-Gesetz (für die Anzahl der Teilchen oberhalb der Energie E) mit wachsender Energie abfällt, während unsere Annahme eher eine diskontinuierliche Energieverteilung oder doch ein durch ein anderes Verteilungsgesetz gekennzeichnetes Spektrum erwarten läßt. Es ist aber zu berücksichtigen, daß bei dem Alter der Strahlung die *kosmologische Expansion* des Weltraumes bei der Diskussion nicht außer acht bleiben kann. Es zeigt sich nun, daß für ein in einem expandierenden Kugelraum kräftefrei bewegtes Teilchen das Produkt aus Impuls p und Weltradius R während der Expansion konstant bleibt: $pR = \text{const.}$ In demselben Maße, als die Expansion zunimmt, muß daher Impuls und Energie der Höhenstrahlteilchen abnehmen, und die Energie eines einzelnen Teilchens wird daher im Laufe der Expansion das ganze Spektrum nach kleineren Energien hin durchwandern. Stellt man sich also vor, daß die primären instabilen Elementarteilchen zu verschiedenen Epochen der kosmologischen Evolution entstanden sind, so ist sehr wohl zu verstehen, daß infolge der kosmischen Expansion aus einem ursprünglich diskreten primären Energiespektrum eine kontinuierliche Energieverteilung resultiert. Die Energieverteilung steht dabei offenbar in einem direkten Zusammenhang mit der zeitlichen Evolution des Kosmos. Auf Einzelheiten beabsichtigen wir bei anderer Gelegenheit zurückzukommen.

[37] Vgl. die Diskussionen bei T. H. Johnson, Rev. mod. Physics **11**, 208 [1939]; M. Schein, W. P. Jesse u. E. O. Wollan, Physic. Rev. **59**, 615 [1941]; **59**, 930 [1941]; K. H. Höcker, Z. Naturforschg. **2a**, 73 [1947].

[38] E. Feenberg u. H. Primakoff, Physic. Rev. **73**, 449 [1948].